INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

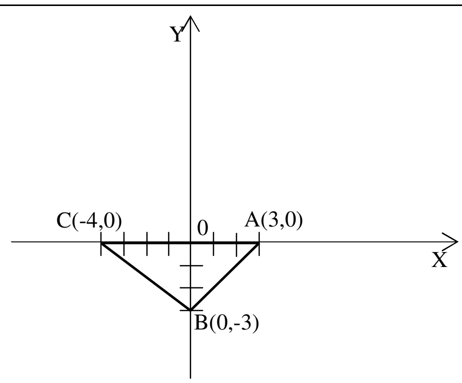
Profil filologie / științe sociale

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Se consideră funcția . $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(3m-2)x+m-4, m\in\mathbb{R}$

a) Să se determine valorile parametrului real m , astfel încât punctul $A(m-4,14)$ să aparțină graficului funcției f .

b) Pentru $m=1$ să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele de intersecție ale graficului funcției f cu axele de coordonate Ox și Oy și de punctul de coordonate $(-4,0)$.

SUBIECTUL NR. 1 – 7 puncte		
a).	$A(m-4,14)\in G_f \Leftrightarrow f(m-4)=14$	1 p.
	Rezultă: $(3m-2)\cdot(m-4)+m-4=14 \Leftrightarrow 3m^2-13m-10=0$	1 p.
	Obținem: $m\in\left\{-\dfrac{3}{5},5\right\}$	1 p.
b).	Pentru $m=1\Rightarrow f(x)=x-3$ $G_f\cap(O_x)\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow x=3\Rightarrow A(3,0)$	1 p.
	$G_f\cap(O_y)\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=-3\Rightarrow B(0,-3)$	1 p.
	 Figură corect reprezentată (suport intuitiv)	1 p.
	$S=\sigma(ABC)=\dfrac{AC\cdot BO}{2}=\dfrac{7\cdot 3}{2}=\dfrac{21}{2}=10{,}5$	1 p.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-mx+m-1, m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine valorile parametrului real m astel încât graficul funcției să intersecteze axa Ox în două puncte simetrice față de axa Oy .

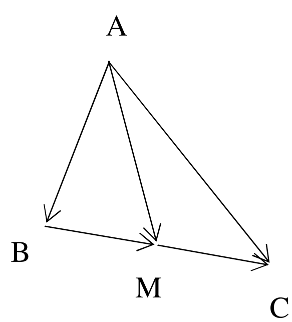
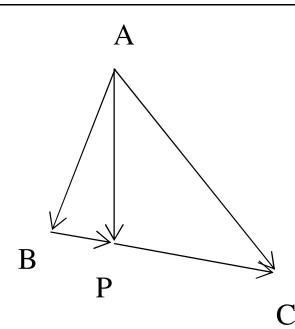
b) Determinați valorile lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația atașată funcției f admite două rădăcini reale, inverse una alteia.

SUBIECTUL NR. 2 – 7 puncte		
a).	$G_f \cap (O_X) \Rightarrow f(x) = 0$	1 p.
	Trebuie să avem: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1 = -x_2$	1 p.
	Condiții: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = 0 \\ P < 0 \end{cases}$	2 p.
	$\Delta = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 > 0$, pentru $m \neq -2$	1 p.
	$S = m = 0$; $P = m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1$. Deci $m = 0$	1 p.
b).	Condiții: $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m-2)^2 \geq 0 \\ m - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 2$	1 p.

3. Fie M un punct pe latura $[BC]$ a triunghiului ABC. Demonstrați că:

a) Dacă M este mijlocul laturii $[BC]$, atunci: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot$.

b) Dacă $P \in [BC]$ astfel încât $\frac{BP}{PC} = \frac{1}{2}$ atunci $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC}$.

SUBIECTUL NR. 3 – 7 puncte		
a).		
	$\triangle ABC : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$	1 p.
	$\triangle ACM : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$	1 p.
	Rezultă: $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$	1 p.
b).	Din: $\frac{BP}{PC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{PC} = 2 \cdot \overrightarrow{BP}$	1 p.
		
	$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BC}$	1 p.
	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$	1 p.

	$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$	1 p.

4. O minge cade de la o înălțime de 8 m. După fiecare contact cu solul, mingea se ridică la jumătate din înălțimea de la care a căzut. Demonstrați că distanța parcursă de minge de la început până atinge solul a 100-a oară nu depășește 24 m.

SUBIECTUL NR. 4 – 7 puncte	
La prima atingere a solului mingea coboară 8m. şi urcă 4m. La a doua atingere a solului mingea coboară 4m. şi urcă 2m., la a treia atingere a solului coboară 2m. şi urcă 1m., s.a.m.d.	1 p.
$d=\left(2^3+2^2\right)+\left(2^2+2\right)+\left(2+1\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$ $+\left(\frac{1}{2^{95}}+\frac{1}{2^{96}}\right)+\frac{1}{2^{96}}$	2 p.
$d=21+1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{2^{96}}+\frac{1}{2^{96}}\right)$	2 p.
$d=23+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2^{95}}\right)=23+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{95}}}{1-\frac{1}{2}}=24-\frac{1}{2^{95}}<24$	2 p.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiințe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. În mulțimea numerelor reale, determinați soluțiile ecuațiilor:

a) $\left(\sqrt[2]{2}\right)^{x} \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^{x+1} = (0,25)^{-1}$

b) $x^{\frac{\lg x+1}{\lg x}} = 100$

SUBIECTUL NR. 1 – 7 puncte		
a).	$2^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{2}$	2 p.
	$\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} = 2 \Rightarrow x = 2$	1 p.
b).	<u>Condițiile de existență</u> $\begin{cases} x > 0 \\ \lg x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0,\infty) \setminus \{1\}$	1 p.
	Logaritmăm ambii membri ai ecuației date şi obținem: $\lg x^{\frac{\lg x+1}{\lg x}} = \lg 10^{2}$	2 p.
	Rezultă: $\frac{\lg x+1}{\lg x} \cdot \lg x = 2 \Rightarrow \lg x = 1 \Rightarrow x = 10 \in (0,\infty) \setminus \{1\}$	1 p.

2. Se dă funcția $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}, f(x) = \lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

a) Să se determine domeniul maxim de definiție a funcției f .

b) Să se cerceteze dacă f este funcție impară.

c) Demonstrați că funcția f este inversabilă şi determinați inversa ei .

SUBIECTUL NR. 2 – 7 puncte		
a).	<u>Condițiile de existență</u>: $\begin{cases} \frac{1-x}{1+x} > 0 \\ 1+x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D \equiv (-1,1)$	1 p.
b).	$f(-x) = \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x) \Rightarrow f$ este funcție impară.	1 p.
c).	O funcție este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă. <u>Injectivitatea</u>. $\left[(\forall)\ x_1, x_2 \in (-1,1)\right.$, din $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, soluție unică$\left.\right]$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{1-x_2}{1+x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$	1 p.

	<u>Surjectivitatea</u>: $\left[(\forall)\ y\in\mathbb{R}, (\exists)\ x\in(-1,1), \text{ a. î. } y=f(x)\right]$ Fie $(\forall)\ y\in\mathbb{R}\Rightarrow y=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\Rightarrow \lg 10^{y}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\Rightarrow x=\frac{1-10^{y}}{1+10^{y}}$	2 p.
	Demonstrează că $-1<x<1$	1 p.
	Cum f este bijectivă, rezultă că f este inversabilă şi inversa funcției f este funcția $f^{-1}:\mathbb{R}\to(-1,1),\ f(x)=\frac{1-10^{x}}{1+10^{x}}$.	1 p.

3. Un angrosist cumpără un anumit număr de aparate de fotografiat pentru suma totală de 21600 lei. Dacă el cumpără cu 30 de aparate mai mult, vânzătorul îi acordă o reducere de 20 lei la fiecare aparat și angrosistul va plati astfel 24000 lei. Câte aparate a cumpărat angrosistul și cât costă un aparat dacă acesta acceptă oferta vânzătorului?

SUBIECTUL NR. 3 – 7 puncte	
Fie x, numărul de aparate cumpărate şi y prețul unui aparat	1 p.
Din enunț avem: $\begin{cases} x\cdot y=21600 \\ (x+30)\cdot(y-20)=24000 \end{cases}$	1 p.
<u>Obținem</u>: $21600-20x+30y-600=24000\Rightarrow 2x-3y+300=0$	1 p.
Din $2x-3\cdot\frac{21600}{x}+300=0\Rightarrow x^{2}+150x=32400=0$	2 p.
<u>Rezultă</u>: $x_1=-270$ (nu convine) şi $x_2=120$	1 p.
Aşadar angrosistul cumpără 120 aparate de fotografiat şi fiecare aparat costă 180 lei	1 p.

4. Trei elevi, Matei, Raluca și Vlad și-au cumpărat, fiecare, o aceeași carte. Din banii pe care îi aveau fiecare, Matei a cheltuit 100%, Raluca $\frac{5}{9}$, iar Vlad 50%. Apoi ei au împărțit toți banii rămași în mod egal. Astfel, Matei a primit de la Raluca 1 leu. Câți lei a avut fiecare înainte de a cumpăra cartea?

SUBIECTUL NR. 4 – 7 puncte	
Fie x lei prețul cărții	1 p.
Din enunț deducem că Matei a avut x lei, Raluca a avut $\frac{9}{5}\cdot x$ lei, iar Vlad a avut $2x$ lei.	2 p.
După ce fiecare şi-a cumpărat cartea, Matei a rămas cu 0 lei, Raluca cu $\left(1-\frac{5}{9}\right)\cdot x=\frac{4}{5}\cdot x$ lei, iar Vlad cu x lei.	1 p.
Le-au mai rămas $\frac{4}{5}\cdot x+x=\frac{9}{5}\cdot x$ lei, deci fiecare a luat câte $\frac{3}{5}\cdot x$ lei	1 p.
Matei a luat de la Raluca $\frac{4}{5}\cdot x-\frac{3}{5}\cdot x=\frac{1}{5}\cdot x=1\Rightarrow x-5$ lei	1 p.
Aşadar Matei a avut 5 lei, Raluca 9 lei, iar Vlad 10 lei.	1 p.

Profil filologie / ştiințe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Considerăm un eșantion al unei populații statistice. Măsurând înălțimea fiecărei persoane, obținem rezultatele date în tabelul de mai jos:

Clasa de valori exprimată în cm	Frecvența absolută cumulată crescător
$[160,165)$	7
$[165,170)$	23
$[170,175)$	60
$[175,180)$	100
$[180,185)$	111
$[185,190)$	118

a) Calculați frecvența absolută ce corespunde clasei $[175,180)$.

b) Calculați modulul seriei statistice dată prin tabelul de mai sus.

c) Calculați înălțimea medie a grupului de persoane din eșantion.

SUBIECTUL NR. 1 – 7 puncte		
a).	Frecvența absolută ce corespunde clasei $[175,180)$ este $100-60=40$	2 p.
b).	<u>Modulul</u> (<u>dominanta</u>) unei serii statistice este valoarea centrală a clasei corespunzătoare celei mai mari frecvențe. Aceasta este în clasa $[175,180)$, deci modulul seriei statistice este $\frac{175+180}{2}=177,5$ (valoarea centrală a unei clase este media aritmetică a valorilor caracteristicii în extremitățile acelei clase)	2 p.
c).	Înălțimea medie (valoarea medie) a grupului de persoane este media ponderată a valorilor centrale. Obținem: $\frac{7\cdot 162,5+16\cdot 167,5+37\cdot 172,5+40\cdot 177,5+11\cdot 182,5+7\cdot 187,5}{118}\simeq 174,75\ cm.$	3 p.

2. Spunem că o maşină are „*randament bun*” dacă produce cel mult 6% rebuturi. Într-un lot de 980 piese produse de o astfel de maşină s-au găsit 68 piese rebutate.

a) Demonstraţi că maşina nu are „*randament bun*”.

b) Care ar fi fost numărul maxim de piese rebutate pentru ca maşina să aibă un „*randament bun*”?

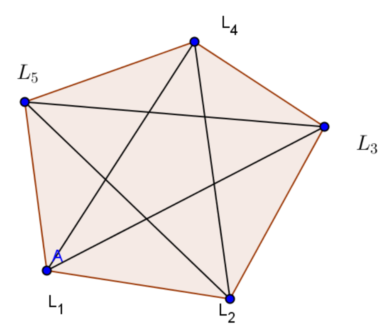
c) Cu cât la sută trebuie redus numărul de piese rebutate pentru ca maşina să aibă un „*randament bun*”?

SUBIECTUL NR. 2 – 7 puncte		
a).	Procentul rebuturilor este $\left(\frac{68}{980}\cdot 100\right)\% \simeq 6{,}94\% > 6$, deci maşina nu are „randament bun”	2 p.
b).	Fie x, numărul maxim de piese rebutate. Ar trebui să avem $\frac{x}{980} \le 0{,}06 \Rightarrow x \le 58{,}8$ Aşadar pentru un „randament bun” ar trebui să avem cel mult 58 de rebuturi	2 p.
c).	Trebuie să reducem numărul pieselor rebutate cu cel puţin 10, adică cu $\left(\frac{10}{68}\cdot 100\right)\% \cong 14{,}7\%$	3 p.

3. Se consideră un graf cu 10 vârfuri şi 45 de muchii.

a) Să se demonstreze că dacă înlăturăm cel mult opt muchii obţinem un graf conex.

b) O comună este formată din cinci localităţi, legate prin şosele ca în figura de mai jos. Dacă cel puţin şapte şosele sunt asfaltate, să se arate că între oricare două localităţi putem identifica un traseu asfaltat.



SUBIECTUL NR. 3 – 7 puncte		
a).	Deoarece $C_{10}^2 = 45$, rezultă că graful este complet	2 p.
	Aşadar din fiecare vârf pleacă exact 8 muchii. Dacă înlăturăm 8 muchii, rezultă că nici unul dintre cele 10 vârfuri nu este vârf izolat şi nici una dintre cele 37 de muchii rămase nu este izolată faţă de celelalte. Dacă am presupune că o muchie este izolată, atunci numărul maxim de muchii rămase, după înlăturarea celor 8, ar fi $C_8^2 + 1 = 29 < 37$. Aşadar oricare ar fi două vârfuri, există un drum care le uneşte, deci se obţine un subgraf conex. Dacă înlăturăm mai puţin de 8 muchi, cu atât mai mult se obţine un graf conex.	2 p.
b).	Din configuraţia dată deducem că avem un graf complet care are $C_5^2 = 10$ muchii. Cum cel puţin 7 şosele sunt asfaltate rezultă că cel mult 3 şosele sunt neasfaltate.	1 p.
	Din fiecare localitate pleacă exact 4 şosele şi cel puţin 3 sunt neasfaltate, putem	2 p.

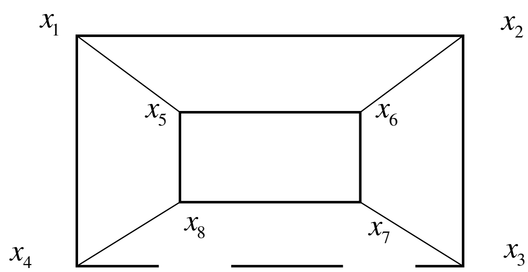
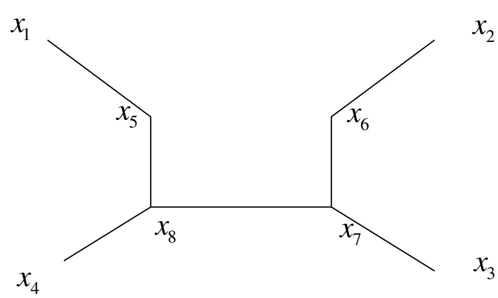
	pleca pe o şosea asfaltată. Prin înlăturarea celor 3 şosele neasfaltate, obținem un graf conex, deci cerința problemei este satisfăcută	

4. Se dă graful $G \equiv \{V, U\}$, unde: $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ și

$U = \{[x_1, x_2];[x_1, x_4];[x_1, x_5];[x_2, x_3];[x_2, x_6];[x_3, x_4];[x_3, x_7];[x_4, x_8];[x_5, x_6];[x_5, x_8];[x_6, x_7];[x_7, x_8]\}$

a) Să se demonstreze că acest graf admite reprezentare planară.

b) Câte muchii trebuie să eliminăm din acest graf pentru a obține un subgraf arbore cu un număr maxim de muchii? Reprezentați un astfel de subgraf arbore.

SUBIECTUL NR. 4 – 7 puncte		
a).	Una dintre reprezentările planare este dată de figura alăturată  	3 p.
	Justificare: Muchiile se intersectează doar în vârfuri	1 p.
b).	Un graf conex şi fără cicluri de numeşte arbore	1 p.
	Graful dat are 5 cicluri cu interioare disjuncte două câte două. Trebuie să eliminăm 5 muchii (câtr una din fiecare ciclu)	1 p.
	O soluție este:  	1 p.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiințe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Fie matricele: $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=A\cdot B$.

a) Demonstrați că $A^4=B^6=I_2$.

b) Demonstrați că $C^n\neq I_2$, pentru orice n număr natural nenul.

SOLUȚIE ŞI BAREM – 7 puncte		
a).	$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $A^4=A^2\cdot A^2=I_2$	1 p.
	$B^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$; $B^3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $B^6=B^3\cdot B^3=I_2$	1 p.
b).	$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $C^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $C^3=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $C^4=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $C^5=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $C^6=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	1 p.
	Presupunem că: $C^n=\begin{cases}\begin{pmatrix}-1 & 2k+1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \textit{dacă } n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}\\ \begin{pmatrix}1 & -2k\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \textit{dacă } n=2k,\ k\in\mathbb{N}^*\end{cases}$	2 p.
	Avem: $C^{n+1}=\begin{cases}\begin{pmatrix}-1 & 2k+3\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \textit{dacă } n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}^*\\ \begin{pmatrix}1 & -2(k+1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \textit{dacă } n=2k+2,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}$	1 p.
	Aşadar: $C^n\neq I_2, (\forall)\ n\in N$	1 p.
b).	$C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=D-I_2, \textit{ unde } D=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	1 p.
	$C=D-I_2;\ D^2=O_2\Rightarrow D^3=D^4=..........=D^n=O_2$	1 p.

	$D \cdot I_2 = I_2 \cdot D \Rightarrow$ *putem aplica formula binomului lui Newton pentru* C^n	1 p.
	$C^n = (D - I_2)^n = (-1)^n \cdot (I_2 - D)^n =$ $= (-1)^n \left[I_2^n - C_n^1 \cdot I_2^{n-1} \cdot D + C_n^2 \cdot I_2^{n-2} \cdot D^2 - C_n^3 \cdot I_2^{n-3} \cdot D^3 + ... \right] =$ $= (-1)^n \cdot [I_2 - n \cdot D]$	1 p.
	Rezultă: $C^n = (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2, (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$	1 p.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Verificați egalitatea: $A^2 - A - 2I_3 = O_3$.

b) Demonstrați că $A^{2016} + A^{2015} = 2^{2015}(A + I_3)$.

SOLUȚIE ȘI BAREM – 7 puncte		
a).	$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	1 p.
	Verifică (<u>prin calcul direct</u>) egalitatea: $A^2 - A - 2 \cdot I_3 = O_3$	1 p.
b).	Din: $A^2 - A - 2 \cdot I_3 = O_3 \Rightarrow A^2 + A = 2 \cdot (A + I_3)$	1 p.
	$A^3 + A^2 = 2 \cdot (A^2 + A) = 2^2 \cdot (A + I_3);$ $A^4 + A^3 = 2^2 \cdot (A^2 + A) = 2^3 \cdot (A + I_3)$	1 p.
	Presupunem că: $A^{k+1} + A^k = 2^k \cdot (A + I_3)$	1 p.
	Deducem că: $A^{k+2} + A^{k+1} = 2^k \cdot (A^2 + A) = 2^{k+1} \cdot (A + I_3)$	1 p.
	Conform inducției complete avem: $A^{n+1} + A^n = 2^n \cdot (A + I_3),\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ Pentru $n = 2015$, obținem: $A^{2016} + A^{2015} = 2^{2015} \cdot (A + I_3)$	1 p.

3. Fie a, b, c numere întregi impare distincte și fie punctele $A(b, c)$; $B(c, a)$; $C(a, b)$, și determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} b & c & 1 \\ c & a & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix}$.

a) Demonstrați că are loc egalitatea: $\Delta = -\frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$.

b) Pot fi punctele A, B, C coliniare? Justificați răspunsul!

c) Demonstrați că aria triunghiului ABC este un număr natural.

SOLUȚIE ȘI BAREM – 7 puncte		
a).	Calcul direct, prin gruparea termenilor din dezvoltarea determinantului Δ.	1 p.
b).	Punctele A, B, C sunt coliniare dacă: $\Delta = \begin{vmatrix} b & c & 1 \\ c & a & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$	1 p.
	$\Delta = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$ ($fals$!!!)	1 p.
	Aşadar punctele A, B, C nu pot fi coliniare	1 p.
c).	a, b, c sunt numere întregi, impare şi distincte. Deci $(a-b)$; $(b-c)$; $(c-a)$, sunt pare şi pătratele sunt multipli de 4	1 p.
	$\sigma(ABC) = \frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert = \frac{1}{4} \cdot \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$	1 p.
	Rezultă că $\sigma(ABC) \in \mathbb{N}^*$	1 p.

4. În matricea de mai jos, pe fiecare linie și pe fiecare coloană trebuie să fie două elemente colorate roșu și două elemente colorate negru. Știind că elementele a_{11}, a_{13} și a_{23} sunt colorate roșu, iar a_{34} este colorat negru, aflați ce culori vor avea elementele a_{32} și a_{42}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

SOLUȚIE ȘI BAREM – 7 puncte	
Configurația inițială este: $\begin{pmatrix} R & a_{12} & R & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & R & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & N \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$	1 p.
Deducem că: $a_{12}, a_{14}, a_{33}, a_{43}$ sunt colorate în negru	1 p.
Obținem configurația: $\begin{pmatrix} R & N & R & N \\ a_{21} & a_{22} & R & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & N & N \\ a_{41} & a_{42} & N & a_{44} \end{pmatrix}$	1 p.
Deducem că: $a_{24}, a_{44}, a_{31}, a_{32}$ sunt colorate în negru	1 p.

Obținem configurația: $\begin{pmatrix} R & N & R & N \\ a_{21} & a_{22} & R & R \\ R & R & N & N \\ a_{41} & a_{42} & N & R \end{pmatrix}$	1 p.
Deducem că: a_{21}, a_{22}, a_{41} sunt colorate în negru	1 p.
Obținem configurația: $\begin{pmatrix} R & N & R & N \\ N & N & R & R \\ R & R & N & N \\ N & a_{42} & N & R \end{pmatrix}$, de unde deducem că a_{32}, a_{42} sunt colorate în roşu	1 p.